234 - Espaces L^p (1≤p≤∞)

U un ouvert de R^n. On considère des fonctions de U dans C.

I) Les espaces L^p

1) Construction de L^p [Gra]

Déf : Np [Gra 151]

Déf : N_infini

Déf : L^p cursif

Th : Holder et Minkowski [Gra 149-150]

Csq : N_p est une semi norme sur L^p cursif

Déf : L^p comme quotient. La norme passe au quotient et est notée ||.||p. (L^p,||.||) est un evn.

Prop : inclusion [Gra 155] *(cas infini à part. Sinon on découpe l'intégrale entre plus grand et plus petit que 1)*

2) Théorèmes de convergence [Gra] + [BL]

Th : cv dominée [Gra 153] *(csq du TCD sur L^1)*

C-ex : faux sur L infini [Gra 153]

Th : fn->f dans L^p implique qu'une sous suite converge pp.

En probas : implications

3) Complétude [Br] + [Rud – ANAF]

Les L^p sont complets [Br 57] *(f_n une suite de Cauchy, il suffit de mq f_n a une sous suite qui cv. Comme f_n est de cauchy, on extrait une sous suite f_n_k tq l'écrat entre deux termes ocnsécutifs est plus petit que 1/2^k. On pose gn(x) la somme partielle des |f{k+1}-f_k|. La norme p de g_n est plus petite que 1. Par TCM, g_n cv vers une limite g. On mq |fm(x)-f_n(x)|<g(x)-g_{n-1}(x) donc suite de Cauchy dans C dc cv vers f(x). On mq f est dans L^p, on finit par le TCD)*

Th : sous espaces fermés de L^p [Rud – ANAF] *(utilise le th du graphe fermé (donc la complétude) mais aussi la structure hilbertienne de L^2)*

II) Dual, réflexivité, séparabilité [Br]

1) Dual et réflexivité

Th : les L^p sont réflexifs sauf pour 1 et infini *(galère)*

Th : représentation de Riesz *(on explicite la bijection)*

Cor : le dual de L^p est L^q

2) Séparabilité

Th : Cc est dense dans L^p

Th : L^p est séparable *(construire des pavés à extrémités rationnelles, utilise la densité des fcts Cc etc)*

Th : critère pour ne pas être séparable

Csq : L^infini pas séparable

III) Produit de convolution

1) Définition [Far] + [HL]

Déf : produit de convolution [Far 114]

Prop : convolution L^1*L^1 [Far 117] *(écrire direct les deux intégrales)*

Prop : inégalité de Young [HL 149] *(Fubini + Hölder)*

2) Régularisation et théorèmes de densité [ZQ] + [BMP] + [Far] + [Br] + [Gou]

But : approcher une fonction de L^p (resp. de C^k) par des fonctions lisses à support compact. Troncature et régularisation.

Th : troncature :

1- Cc^k est dense dans C^k pour la top usuelle de C^k qui est la cv unif sur tout compact et la cv unif des dérivées sur tout compact *(on multiplie f par des fonctions plateaux)*
2- L_c^p est dense dans L^p pour la norme p *(pareil)*
3- Cc est dense dans L^p pour la norme p *(pour p=1 : les fonctions étagées sont denses dans L^1. Il suffit de mq toute indicatrice de borélien peut être approchée pas des contions Cc. Soit A un borélien. 1_A est limite de 1_An où An sont des boréliens bornés, et pour n assez grand, ||1_A-1_An|| est très petit. Donc il suffit de montrer qu'on peut approcher un borélien borné par des fct Cc. A un borélien borné, contenu dans un ouvert borné W. Alors il existe une fonction continue nulle en dehors de W très proche de 1_A (théorème d'approximation, très long à montrer))*

Et maintenant, régularisation.

Idée : convoler régularise la fonction. On va essayer d'approximer des fonctions par leurs convolées. Pour ça il faut convoler avec des fonction lisses, à support compact si possible.

Déf : identité approchée (IA) et à support compact (IAc) [BMP 119]

Ex : approximation [Br 70]

Théorème :

- si f est continue et bornée, cv simple *(pour Plancherel)*
- si f est uniformément continue et bornée, alors Phi_n*f cv unif vers f
- si f est dans L^p alors Phi_n*L^p cv vers f dans L^p [BMP 119] *(le 2^{e} point utilise le fait que Cc dense dans L^p)*

Cor : Cc^infini est dense dans L^p pour la norme p et dans C^k pour la top usuelle [ZQ 325] *(pour le premier point, on prend f dans L^p à support compact, et Phi_n une IA à support compact. Alors Phi_n*f est lisse à support compact et cv vers f dans L^p. Donc Cc^infini est dense dans L^p_c, qui est dense dans L^p . Pour le second point, on prend f dans Cc^k, f est donc UC donc Phi_n*f cv uniformément vers f, donc Cc^infini est dense dans Cc^k, et Cc^k est dense dans C^k)*

Csq : soit f une fonction continue sur un segment J de R. Alors f est limite unif de polynômes [Gou 284] *(on prolonge f au-delà du segment pour la transformer en une fonction à support compact (on la relie continûment à zéro). Ca devient g. On convole g avec une identité approchée formée e polynômes (ça existe), g est donc limite uniforme de polynômes, donc f aussi)*

3) RFK

RFK [HL]

IV) L^2 : un espace hilbertien

1) Un produit scalaire sur L^2 [Gra]

[Gra 157]

2) Applications aux séries de Fourier [ZQ]

Th : e^inx est une base o.n. de $L^2(R/2PiZ)$ *(csq de Fejer)*

Csq : les fonctions de L^2 sont sommes de leur série de Fourier

3) Polynômes orthogonaux [BMP] + [Dem]

Définition des espaces $L^2(I,ro)$ [BMP 110]

Rq : $L^2(I,ro)$ est complet

Def : suite de polynômes orthogonaux [BMP 110]

Prop : il existe une unique suite de polynômes orthogonaux [Dem 51]

Ex : Hermite, puis Legendre [Dem 52]

Prop : meilleure approximation

Th : sous certaines conditions sur la fonction de poids, les polynômes orth forment une base hilb de L^2(I,ro) [BMP 140] (utilise les fonctions holomorphes).

Cor : si I est borné, le th s'applique.

Th : on en déduit une base o.n de L^2(R) gâce aux polynômes de Hermite [BMP 112]

(En plus : les polynômes orthogonaux sont scindés à racines simples, et servent pour le calcul numérique (méthode de Gauss). Voir Demailly)

4) Espace de Bergman [B & M]

Définition

Prop : $A^2(U)$ est un Hilbert

Prop : base hilbertienne de $A^2(D)$ (savoir qu'on peut alors trouver une base hilb de $A^2(U)$ grâce au théorème de représentation conforme de Riemann)

Développements :
1 - Sous espaces fermés de L^p [Rud Analyse fct 111] (**)
2 - Polynômes orthogonaux (base hilbertienne + appl à L^2) [Dem] + [BMP] (**)
3 - Espace de Bergman [Bayen & Margaria – Espaces de Hilbert et opérateurs] (* ou **)
RFK [HL] (**)

Bibliographie :

[Gra] Gramain
[BL]

[Rud – ANAF]
[Br]
[ZQ]
[BMP]
[Dem]
[Far]
[HL]
[B&M]
[Gou]

<u>Rapport jury 2005-2009 :</u> *le jury a apprécié les candidats sachant montrer qu'avec une mesure finie L2 inclus dans L1 (ou même Lp inclus Lq si p > q). Il est important de pouvoir justifier l'existence de produits de convolution (exemple L1 * L1).*